

Алгоритм Евклида

Общий делитель чисел a и b — это такое число d , которое **делит нацело** и a , и b .

Наибольший общий делитель чисел a и b — это самый большой из общих делителей чисел a и b

Обозначение. НОД(a, b)

Пример. НОД(10, 15) = 5



Алгоритм Евклида

Наименьшее натуральное число, которое делится и на число a , и на число b , называется **наименьшим общим кратным** этих чисел.

Обозначение. НОК(a, b)

$$\text{НОД}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОК}(a, b)}$$

Число c делится нацело на число x тогда и только тогда, когда **остаток от деления c на x равен 0**.



Алгоритм Евклида

Задача 5.10 Примените процедуру **НОД** к числам $a = 15$ и $b = 10$. Составьте таблицу состояний переменных x и d . Какие значения принимает переменная d .

```
алг нод
нач
. цел  $a, b, d, x$ 
. ввод  $a, b$ 
.  $d := 1$ 
.  $x := 1$ 
. нц пока  $x < a$ 
. .  $x := x + 1$ 
. . если  $\text{mod}(a, x) = 0$  и  $\text{mod}(b, x) = 0$ 
. . . то  $d := x$ 
. . все
. кц
. вывод  $d$ 
кон
```



Алгоритм Евклида

Задача 5.10. Продолжение Таблица состояний.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>x</i>	<i>d</i>
10	15	1	1
10	15	2	1
10	15	3	1
10	15	4	1
10	15	5	5
10	15	6	5
10	15	7	5
10	15	8	5
10	15	9	5



Алгоритм Евклида

«Алгоритм Евклида»

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b) \quad \text{при } a > b$$

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b - a) \quad \text{при } a < b$$

$$\text{НОД}(a, b) = a \quad \text{при } a = b$$

Пример. $\text{НОД}(192, 144) = \text{НОД}(192 - 144, 144) =$
 $\text{НОД}(48, 144) = \text{НОД}(48, 144 - 48) = \text{НОД}(48, 96) =$
 $\text{НОД}(48, 96 - 48) = 48.$

«Алгоритм Эйлера»

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(\text{mod}(a, b), b) \quad \text{при } a > b$$

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, \text{mod}(b, a)) \quad \text{при } a < b$$

$$\text{НОД}(a, b) = a \quad \text{при } a = b$$



Алгоритм Евклида

алг **нод_Евклида**

нач

- **цел** a, b
- **ввод** a, b
- **нц пока** $a \langle \rangle b$
- . **если** $a > b$
- . . **то** $a := a - b$
- . . **иначе** $b := b - a$
- . **все**
- **кц**
- **вывод** a

кон

алг **нод_Эйлера**

нач

- **цел** a, b, r
- **ввод** a, b
- **нц пока** $b \langle \rangle 0$
- . $r := \text{mod}(a, b)$
- . $a := b$
- . $b := r$
- **кц**
- **вывод** a

кон



Алгоритм Евклида

Задача 5.13 Воспользовавшись алгоритмом Евклида, вычислите:

- а) НОД(42, 24); б) НОД(21, 34); в) НОД(111, 1111);
г) НОД(12007, 95).

Задача 5.14 Найдите наибольшие общие делители пар чисел в предыдущей задаче, раскладывая числа на простые множители. Какой метод удобнее?



Алгоритм Евклида

Задача 5.13 (а)

$$\begin{aligned}\text{НОД}(42, 24) &= \text{НОД}(42-24, 24) = \text{НОД}(18, 24) = \\ &= \text{НОД}(18, 24-18) = \text{НОД}(18, 6) = \text{НОД}(18-6, 6) = \\ &= \text{НОД}(12, 6) = \text{НОД}(12-6, 6) = \text{НОД}(6, 6) = 6\end{aligned}$$

Задача 5.14 (а)

$$42=2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 24=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\text{НОД}(42, 24) = 2 \cdot 3 = 6$$

