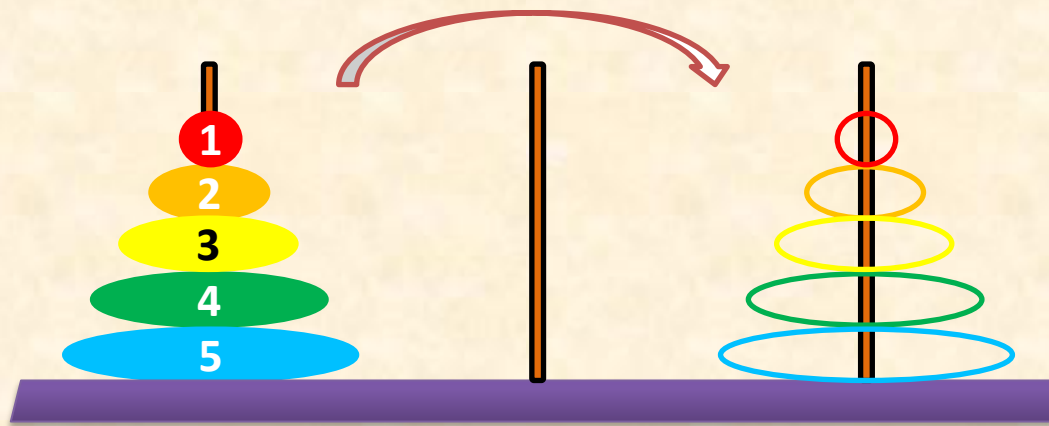


# Ханойские башни



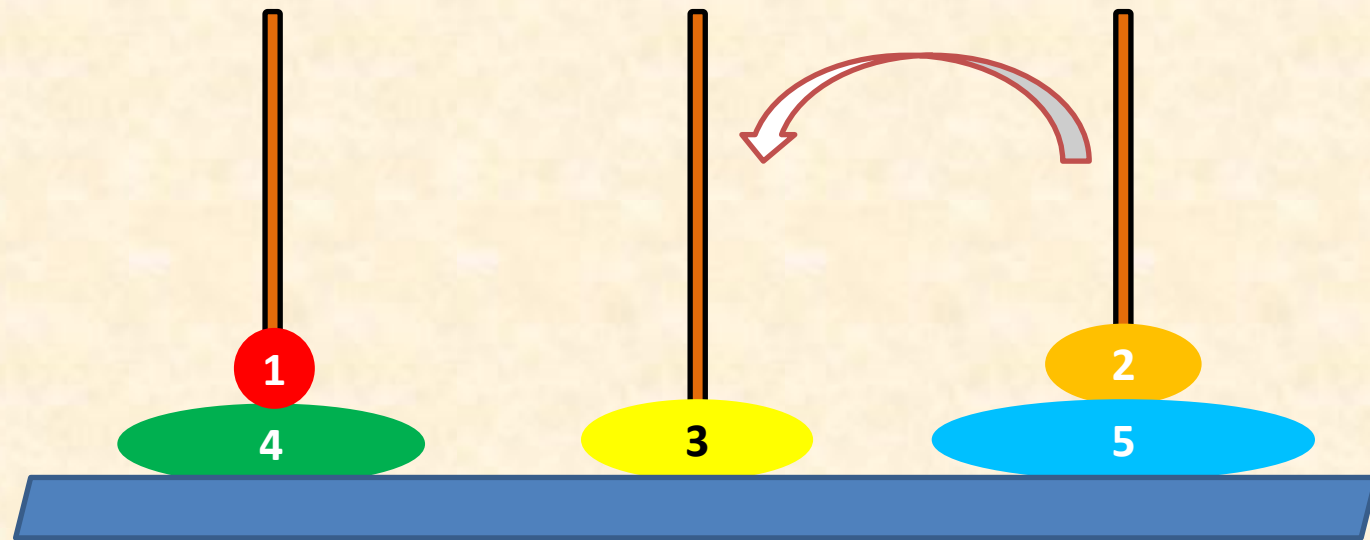
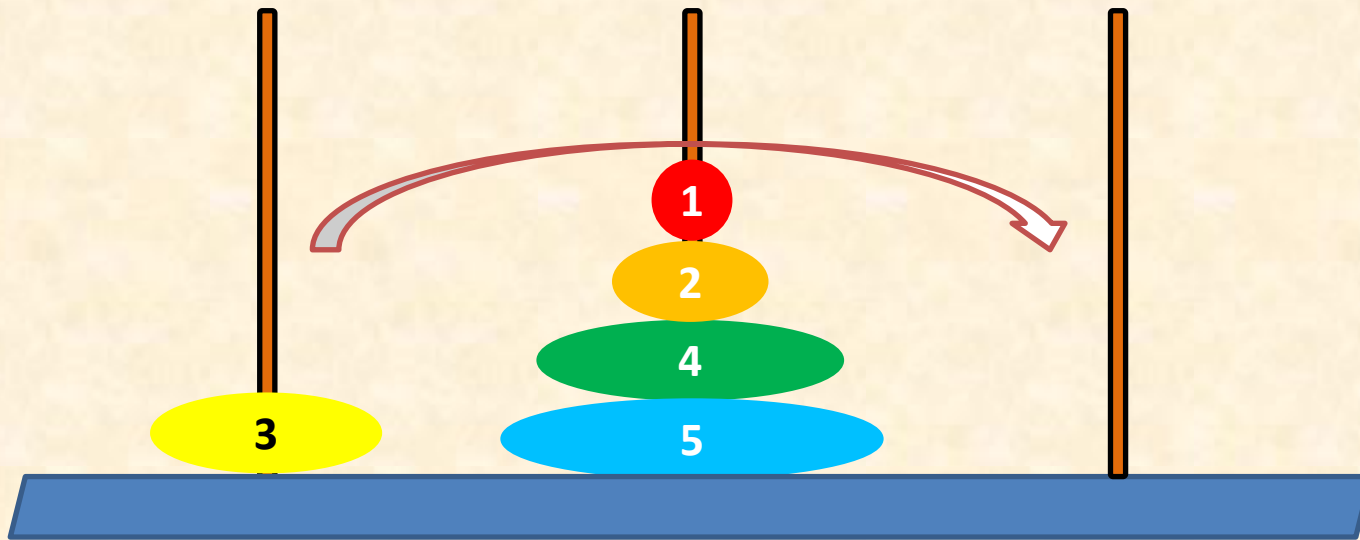
«Профессор Клаус (Claus)  
из Колледжа Ли-Су-Стьян (Li-Sou-Stian)»



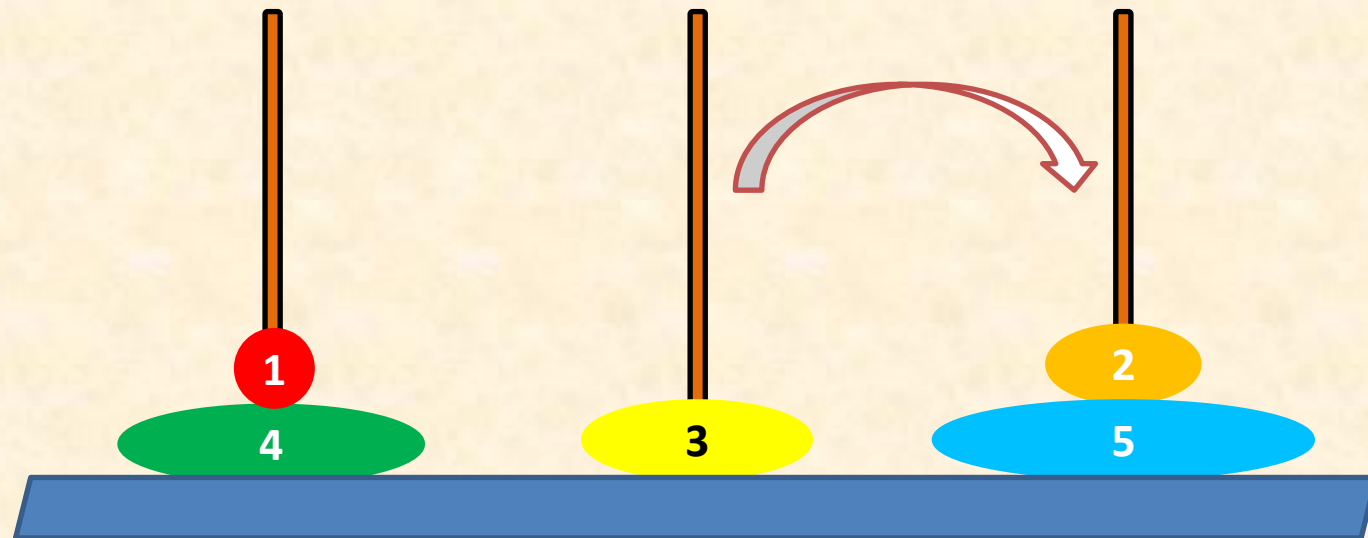
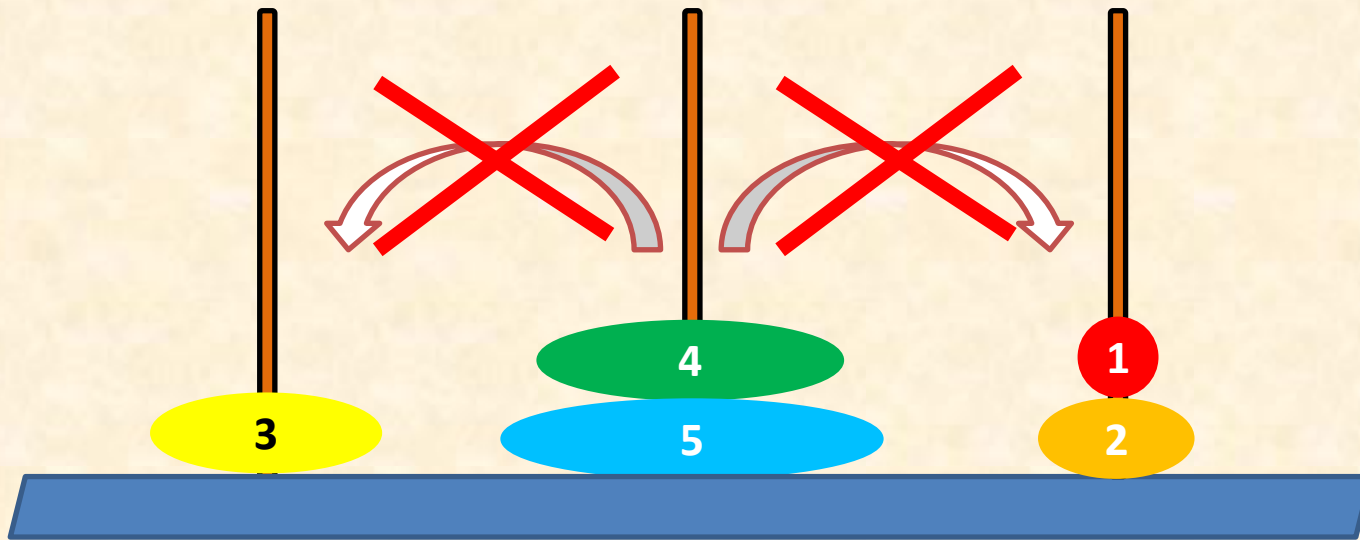
Франсуа Эдуард Анатоль  
Люка (Lucas)



# Ханойские башни



# Ханойские башни



# Ханойские башни

Несколько кружков разных размеров уложены друг на друга, образуя башню. Башня стоит на одном из трех полей. Задача — переставить ее на другое поле по следующим правилам:

- 1) кружки переставляются с одного поля на другое, при этом их укладывают друг на друга, так что получаются маленькие башни. Нельзя откладывать кружки в сторону или ставить один кружок вместо другого;
- 2) при каждом ходе двигается только один кружок. Нельзя переносить несколько кружков одновременно. Например, запрещено брать по кружку в каждую руку;
- 3) можно брать кружок лишь с вершины какой-нибудь башни и класть его только на вершину другой башни. Нельзя брать кружок из середины башни или вставлять его в середину другой башни;
- 4) запрещено класть больший кружок на меньший.



# Ханойские башни

<b>Таблица рекордов</b>	
<b>Число кружков</b>	<b>Число ходов</b>
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

**Задача 8.1** Попробуйте угадать правило (или формулу), которому подчиняется последовательность

$$P = \{ 1, 3, 7, 15, 31, \dots \}$$



# Ханойские башни

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

$$31 = 2 \cdot 15 + 1$$

$$1 = 2^1 - 1$$

$$3 = 2^2 - 1$$

$$7 = 2^3 - 1$$

$$15 = 2^4 - 1$$

$$a_n = 2^n - 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 + 1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$$

## «УДВОИТЕЛЬ»

Команда	Число
	1
умножь на 2	2
прибавь 1	3
умножь на 2	6
прибавь 1	7
умножь на 2	14
прибавь 1	15



## Ханойские башни

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1 \quad a_n = 2^n - 1$$

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1 = 2 * (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Если у последовательностей совпадают  $n$ -е элементы, то у них совпадают и  $(n + 1)$ -е элементы. Значит, обе формулы определяют одну и ту же последовательность.

**Задача 8.2** Предскажите минимальное число ходов для башен из: а) 6; б) 7; в) 8 кружков.



## Ханойские башни

Возьмем, к примеру, башню из **5** кружков. Доказать, что ее *можно* перенести за **31** ход, легко: просто перенести, и все. Но как доказать, что ее *нельзя* перенести за **30** (или даже меньшее число) ходов?

***Доказательство невозможности*** – это математическое рассуждение, которое доказывает что что-то невозможно.





## Ханойские башни

**Задача 8.3** Предположим, что монахам требуется 1 секунда на выполнение одного хода игры. Оцените приблизительно, сколько времени понадобится им для выполнения всего задания. Или, если вам так больше нравится, сколько времени должно пройти от Начала до Конца Света?

$(2^{64} - 1)$  перекладываний = **18 446 744 073 709 551 615**  
 $\approx$  **585 млрд. лет**

$$\begin{aligned} 2^{64} &= 2^4 \cdot 2^{60} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 = 16 \cdot 1024^6 \approx \\ &\approx 16 \cdot (10^3)^6 = 16 \cdot 10^{18} \text{ секунд.} \end{aligned}$$



## Ханойские башни

**Задача 8.4** Представим себе, что какой-нибудь будущий Суперкомпьютер выполняет наилучшую возможную программу. И он может совершать в секунду один миллиард переносов дисков. Сколько времени понадобится компьютеру, чтобы переложить башню из 64 кружков?



# Ханойские башни

## Команды Исполнителя Монах I.

**перенеси с А на В (<кружок>)** - переносит кружок с номером, указанным в аргументе, с поля А на поле В.

Кружки будем обозначать номерами 1, 2, 3, 4, ... , номер 1 обозначает самый маленький кружок, номер 2 — следующий, и т. д.

**Упражнение.** Выпишите все команды **Исполнителя Монах I**. Сколько их?

**Упражнение.** Опишите ситуации, в которых может возникнуть **ОТКАЗ**.



# Ханойские башни

## Команды Исполнителя Монах I.

**перенеси с А на В (<кружок>)** - переносит кружок с номером, указанным в аргументе, с поля А на поле В.

**перенеси с А на С (<кружок>)** - переносит кружок с номером, указанным в аргументе, с поля А на поле С.

**перенеси с В на А (<кружок>)** - переносит кружок с номером, указанным в аргументе, с поля В на поле А.

**перенеси с В на С (<кружок>)** - переносит кружок с номером, указанным в аргументе, с поля В на поле С.

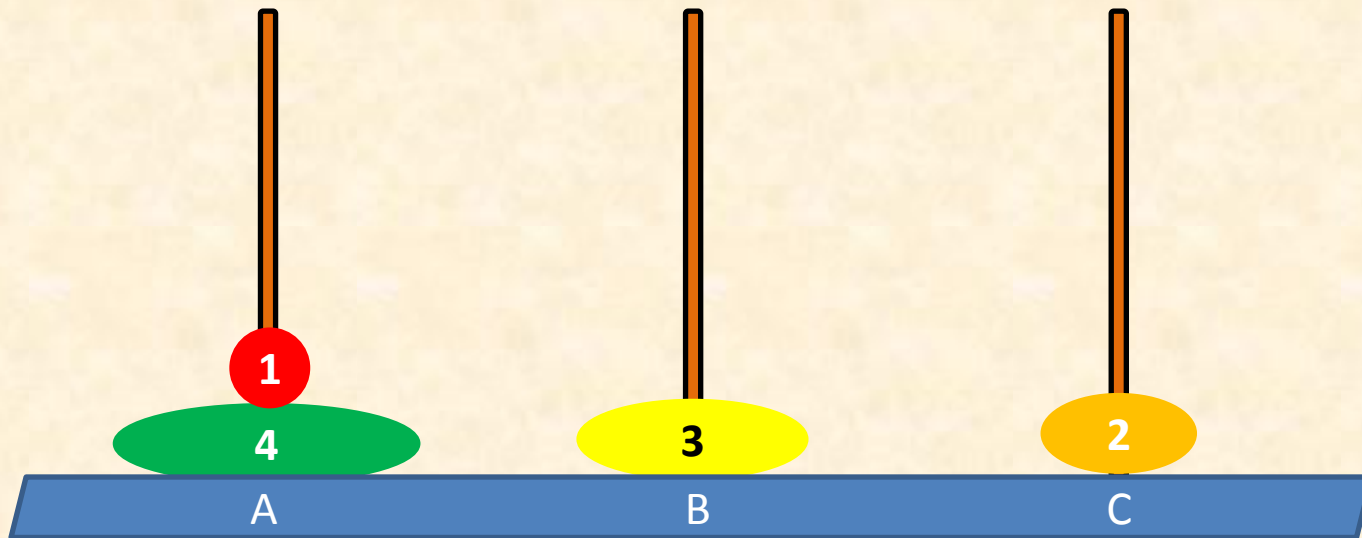
**перенеси с С на А (<кружок>)** - переносит кружок с номером, указанным в аргументе, с поля С на поле А.

**перенеси с С на В (<кружок>)** - переносит кружок с номером, указанным в аргументе, с поля С на поле В.



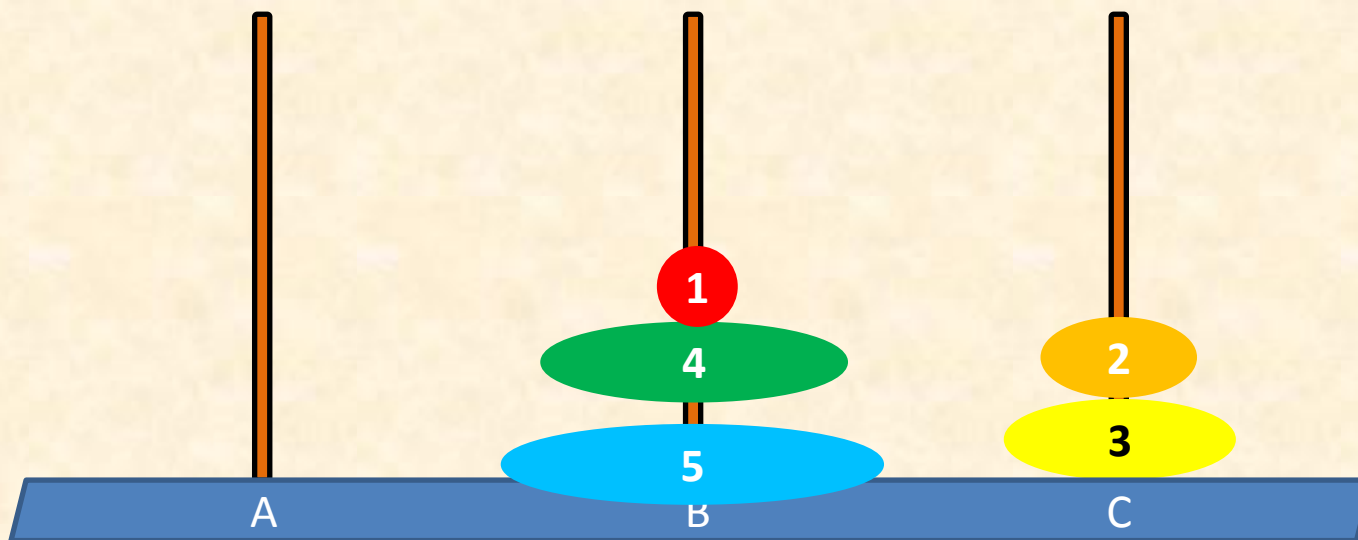
# Ханойские башни

**Задачник 8.1** На рисунках изображено несколько положений кружков на стержнях. Можно ли эти положения получить из начального положения с соблюдением правил игры? Если можно, то как? Постарайтесь написать программы, требующие наименьшего числа ходов.



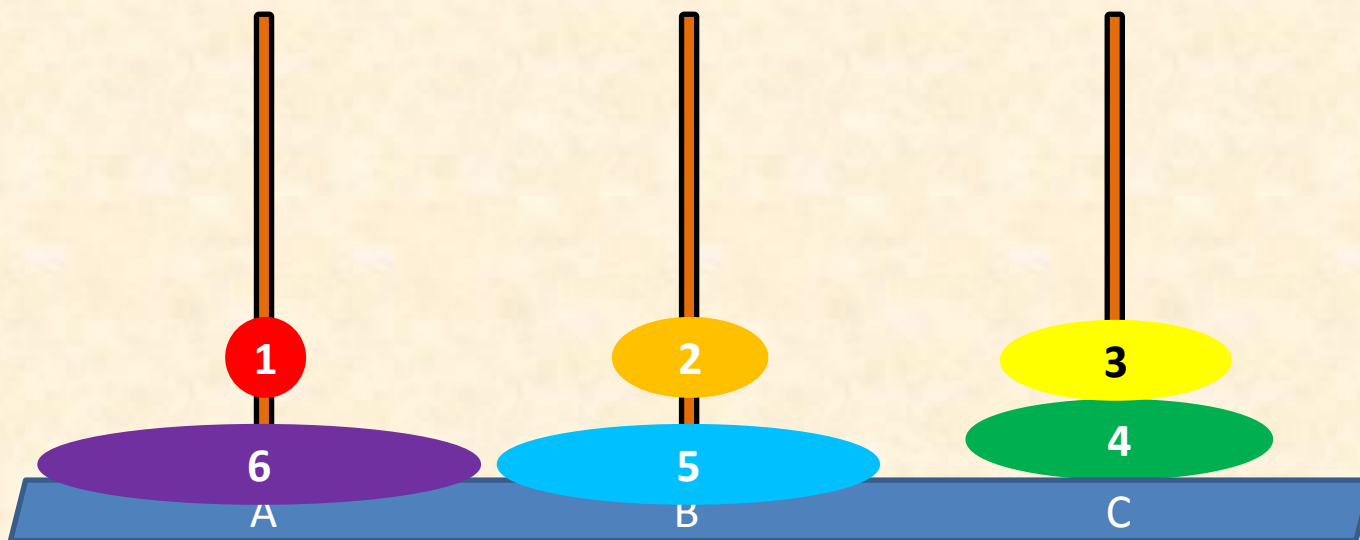
# Ханойские башни

**Задачник 8.1** На рисунках изображено несколько положений кружков на стержнях. Можно ли эти положения получить из начального положения с соблюдением правил игры? Если можно, то как? Постарайтесь написать программы, требующие наименьшего числа ходов.



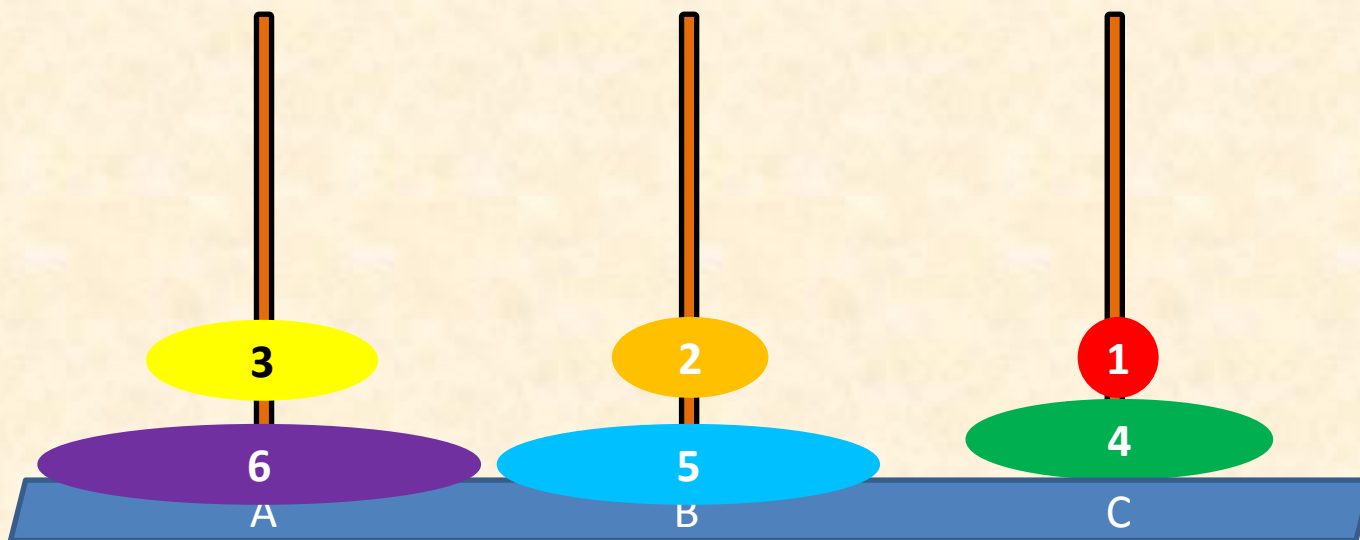
# Ханойские башни

**Задачник 8.1** На рисунках изображено несколько положений кружков на стержнях. Можно ли эти положения получить из начального положения с соблюдением правил игры? Если можно, то как? Постарайтесь написать программы, требующие наименьшего числа ходов.



# Ханойские башни

**Задачник 8.1** На рисунках изображено несколько положений кружков на стержнях. Можно ли эти положения получить из начального положения с соблюдением правил игры? Если можно, то как? Постарайтесь написать программы, требующие наименьшего числа ходов.





# Ханойские башни

перенеси с А на В (1)  
перенеси с А на С (2)  
перенеси с В на С (1)

перенеси с А на С (1)  
перенеси с А на В (2)  
перенеси с С на В (1)  
перенеси с А на С (3)  
перенеси с В на А (1)  
перенеси с В на С (2)  
перенеси с А на С (1)



# Ханойские башни

**ПРОЦ** 2-башня с А на В  
**НАЧАЛО**

перенеси с А на С (1)  
перенеси с А на В (2)  
перенеси с С на В (1)

**КОНЕЦ**

**ПРОЦ** 2-башня с В на С  
**НАЧАЛО**

перенеси с В на А (1)  
перенеси с В на С (2)  
перенеси с А на С (1)

**КОНЕЦ**

**ПРОЦ** 3-башня с А на С  
**НАЧАЛО**

2-башня с А на В  
перенеси с А на С (3)  
2-башня с В на С

**КОНЕЦ**



# Ханойские башни

**Задача 8.5** Составьте таблицу состояний для программы.

**ПРОЦ** 3-башня с А на С

**НАЧАЛО**

2-башня с А на В

перенеси с А на С (3)

2-башня с В на С

**КОНЕЦ**



## Ханойские башни

**Упражнение** Напишите процедуру 3-башня с А на В и 3-башня с В на С . При необходимости используйте процедуры переноса меньших башен.

**ПРОЦ** 3-башня с А на В  
**НАЧАЛО**

2-башня с А на В  
перенеси с А на С (3)  
2-башня с В на С

**КОНЕЦ**

**ПРОЦ** 3-башня с В на С  
**НАЧАЛО**

2-башня с В на А  
перенеси с В на С (3)  
2-башня с А на С

**КОНЕЦ**



# Ханойские башни

Из двух процедур для башни из трех кружков, мы можем написать процедуру для башни из четырех кружков.

**ПРОЦ** 4-башня с А на С  
**НАЧАЛО**

3-башня с А на В

← 7 ходов

перенеси с А на С (4)

← 1 ход

3-башня с В на С

← 7 ходов

**КОНЕЦ**

