

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Будем называть **партии разумными** если **оба игрока стремятся к победе**.

Игроков, которые стараются победить, а не делают ходы наугад, мы тоже будем называть **разумными**.

В каждой игре с полной информацией, правила которой не допускают ничьей, существует **выигрышная стратегия** для одного из игроков.

Выигрышная стратегия — это **правило**, следуя которому, **один из игроков может выиграть, как бы ни играл его противник**.

Для каждой игры с определёнными правилами **выигрышную стратегию может иметь только один из игроков**.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Шахматы и шашки это игры с полной информацией. В этих играх есть **выигрышная стратегия** для одного из игроков.

Почему никто не воспользуется такой стратегией?

Поиск выигрышной стратегии в игре с полной информацией происходит **при помощи перебора всех возможных партий игры**. Для этого строится дерево игры и изучаются вершины построенного дерева. Дерево игры в шахматы огромно: на первом уровне такого дерева **20** вершин, на втором — уже **400** вершин!

В играх, которые допускают ничью, может существовать **ничейная стратегия** — **правило**, позволяющее каждому из игроков **свести любую партию к ничьей**. Ничейная стратегия есть, например, в игре **Крестики-нолики**.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Для того чтобы найти *выигрышную стратегию*, нужно последовательно рассмотреть *все возможные позиции игры*.

Все позиции игры можно перебрать, *построив дерево игры*.

Но для некоторых игр удаётся построить выигрышную стратегию без перебора всех возможных позиций.

Одна из немногих игр, в которых *можно перебрать все позиции, не строя дерева игры*, — это игра *Камешки*.

Позиция выигрышная, если из неё **есть ход, который оставит противнику проигрышную позицию**.

Позиция проигрышная, если **любой ход** из в неё **оставляет противнику выигрышную позицию**.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Начальная позиция. 8 камешков.

Возможные ходы. Разрешается брать 1, 3 или 4 камешка за 1 ход.

Заключительная позиция. Пустая куча камешков. При этом игрок, который забрал последний камешек из кучи, считается выигравшим.

Разместим все возможные позиции игры на числовой линейке и пометим на числовой линейке **выигрышные позиции красным**, а **проигрышные — синим**.



Позиция 0 проигрышная: партия закончена, игрок, чья очередь была бы делать ход, уже проиграл.

Позиции 1, 3 и 4 выигрышные: игрок может забрать все камешки и тем самым оставить противнику проигрышную позицию 0.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.



Позиция 2 проигрышная: из этой позиции можно сделать только один ход — взять один камешек и тем самым оставить противнику выигрышную позицию **1**.

Позиция 5 выигрышная, взяв **3** камешка, игрок оставляет противнику проигрышную позицию **2**.

Позиция 6 выигрышная: взяв **4** камешка, игрок оставляет противнику проигрышную позицию **2**.

Позиция 7 проигрышная: все ходы, которые можно сделать из этой позиции, оставляют противнику выигрышные позиции **6, 4** или **3**.

Начальная позиция 8 выигрышная: взяв один камешек, игрок оставляет противнику проигрышную позицию **7**.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.



Выигрышная стратегия для Первого:

На первом ходу взять **1** камешек (при этом Второму достаётся **7** камешков).

На третьем ходу взять столько камешков, чтобы оставить на столе только **2** камешка или **0** камешков (сколько именно камешков при этом надо взять, зависит от того, сколько камешков возьмёт Второй на втором ходу).

На пятом ходу (если игра не закончилась раньше) забрать **1** оставшийся камешек и выиграть.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.



Изучая позиции игры от заключительной к начальной, мы последовательно поместили все возможные позиции игры как *выигрышные* или *проигрышные*. При этом **начальная позиция оказалась выигрышной**. Это означает, что в данной игре **выигрышную стратегию имеет Первый** (тот, кто должен делать ход в начальной позиции).

Выигрышная стратегия заключается в том, чтобы **после каждого хода оставлять противнику проигрышную позицию**. Поэтому **выигрышную стратегию** в игре имеет тот игрок, который **первым сможет занять выигрышную позицию**. Если **начальная позиция выигрышная**, то **выигрышную стратегию имеет Первый**, если **проигрышная** — **Второй**.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 222. Найди *выигрышную стратегию* в игре *Камешки* (начальная позиция **15**, разрешается брать **1**, **3** или **4** камешка). Для этого исследуй все позиции игры, раскрась числовую линейку. Выясни, у кого из игроков есть *выигрышная стратегия*. Построй последовательность такой партии, в которой этот игрок следует *выигрышной стратегии*, а его противник на каждом ходу берёт **1** камешек.



$$A = \{ 15, 14, 13, 9, 8, 7, 6, 2, 1, 0 \}$$

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 223. Найди выигрышную стратегию в игре *Камешки* (начальная позиция 14, разрешается брать 1, 3 или 4 камешка). Выясни, у кого из игроков есть выигрышная стратегия в этой игре, сформулируй выигрышную стратегию.



Выигрышная стратегия есть у Второго игрока.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 223.



Выигрышная стратегия

Ход первый – из позиции **14** взять **1**, **3** или **4**. Попадаем в выигрышные позиции **13**, **11**, **10**.

Ход второй – из позиции **13** взять **4**, из позиции **11** взять **4**, из позиции **10** взять **1**. Попадаем в проигрышные позиции **9** или **7**.

Ход третий – из позиции **9** взять **1**, **3** или **4**, из позиции **7** взять **1,3** или **4**. Попадаем в выигрышные позиции **8**, **6**, **5**, **4** или **3**.

Ход четвёртый – из позиции **8** взять **1**, из позиции **6** взять **4**, из позиции **5** взять **3**, из позиции **4** взять **4** (**выиграш**), из позиции **3** взять **3** (**выиграш**). Либо уже выигрыш, либо попадаем в проигрышные позиции **7** или **2**.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 223.



Выигрышная стратегия (продолжение)

Ход пятый – из позиции **7** взять **1**, **3** или **4**, из позиции **2** взять **1**.

Попадаем в выигрышные позиции **6**, **4**, **3**, **1**.

Ход шестой – из позиции **6** взять **4**, из позиции **4** взять **4** (**выиграш**), из позиции **3** взять **3** (**выиграш**), из позиции **1** взять **1** (**выиграш**). Либо уже выигрыш, либо попадаем в проигрышную позицию **2**.

Ход седьмой – из позиции **2** взять **1**. Попадаем в выигрышную позицию **1**.

Ход восьмой – из позиции **1** взять **1** (**выиграш**).

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 224. Найди выигрышную стратегию в игре *Камешки* (начальная позиция **214**, разрешается брать **1** или **2** камешка). Для решения не обязательно раскрашивать числовую линейку от **0** до **214** целиком. Вместо этого можно:

- а) раскрасить позиции от **0** до **18**;
- б) найти закономерность расположения *проигрышных позиций* на числовой прямой;
- в) определить, какой будет начальная позиция, а, значит, выяснить, у кого из игроков есть *выигрышная стратегия*;
- г) сформулировать *выигрышную стратегию*, не перечисляя *проигрышные позиции*, а описывая их.



Закономерность. *Проигрышные позиции* – это числа, которые при делении на **3** дают в остатке **0**.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 224.

Начальная позиция. 214 камешков.

Возможные ходы. Разрешается брать 1 или 2 камешка за 1 ход.

Заключительная позиция. Пустая куча камешков. При этом игрок, который забрал последний камешек из кучи, считается выигравшим.



Закономерность. *Проигрышные позиции* – это числа, которые при делении на 3 дают в остатке 0.

Выигрышная стратегия

Ход первый – из выигрышной позиции 214 (не делится на 3) берём 1 камешек. Попадаем в проигрышную позицию 213 (остаток 0 при делении на 3).

Следующие ходы На любые ходы Второго Первый берёт $3 - n$, где n – число камней взятое Вторым.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 226. ПРАВИЛА ИГРЫ *СОТНЯ*

Начальная позиция. Число 0.

Возможные ходы. На каждом ходу игрок прибавляет к имеющемуся числу любое целое число от 1 до 9 включительно.

Как определить победителя. Игра заканчивается, если позиция оказывается равной **100**. При этом **выиграл тот, кто прибавил последнее число.**

Устройте мини-соревнование — сыграйте 4 партии в *Сотню*.

Начинайте игру по очереди: пусть один из вас играет Первым в партиях с чётными номерами, а другой — с нечётными.

Сколько раз в вашем соревновании выиграл Второй?

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 227. Найди выигрышную стратегию в игре *Сотня*. Для этого:

- 1) начни раскрашивать числовую линейку, начиная с заключительной позиции — от 100 до 78;
- 2) найди закономерность расположения **проигрышных позиций** на числовой прямой;
- 3) определи, какой будет **начальная позиция** — **выигрышной** или **проигрышной**, — а, значит, выясни, у кого из игроков есть **выигрышная стратегия**;
- 4) сформулируй **выигрышную стратегию**.

0	1	2	3	4	5	???	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 229. Дерево игры *Ползунок* на поле 5x4 очень большое, оно не помещается на странице. **L** — это часть такого дерева игры, состоящая из некоторой вершины (т. е. позиции) **A** и всех вершин, в которые из **A** идут пути. Таким образом, **L** есть дерево перебора всех возможных окончаний игры из позиции **A**.

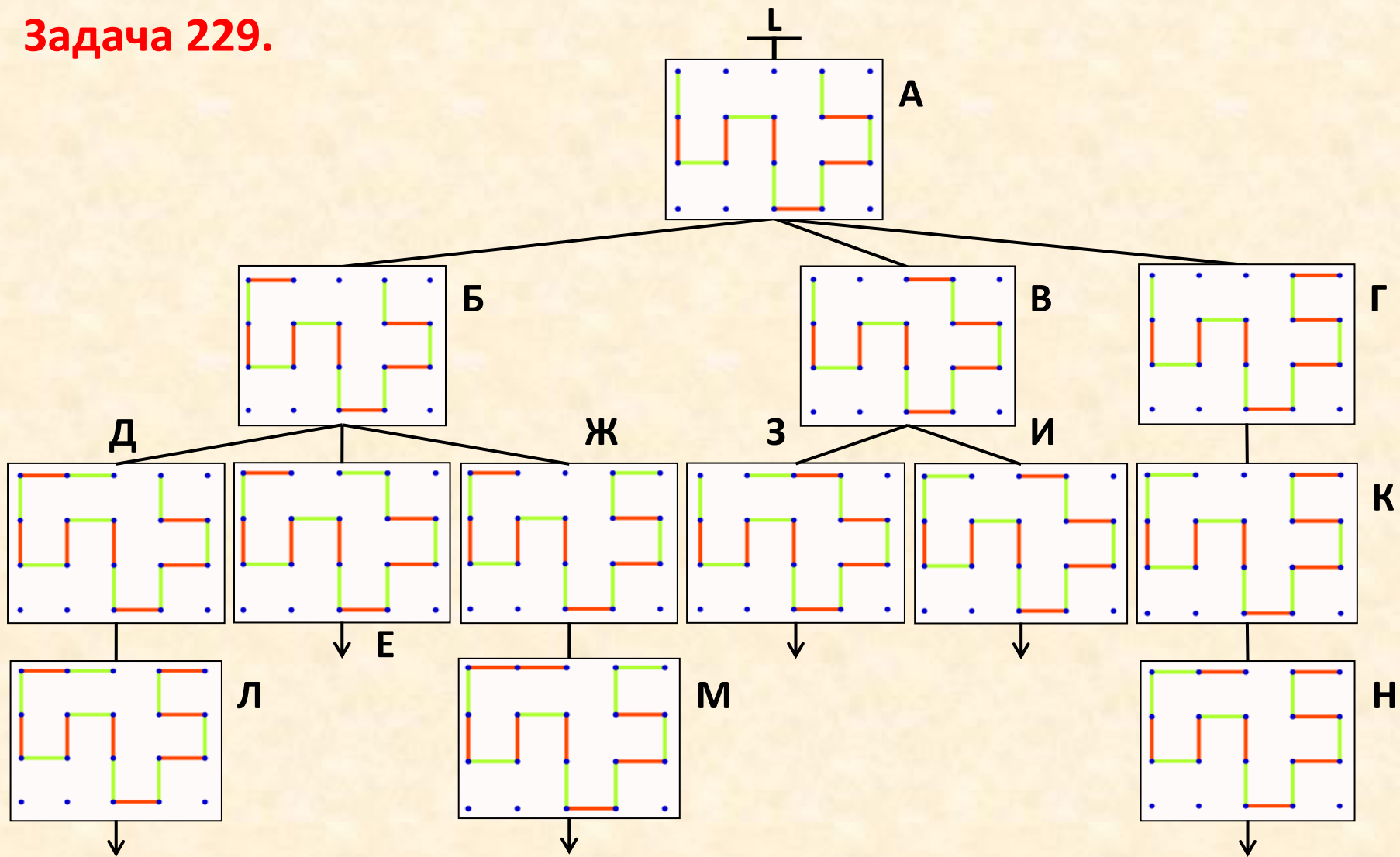
Определи, какой игрок — Первый или Второй — должен ходить в позиции **A**. Затем определи, у кого из игроков есть **выигрышная стратегия**. Для этого:

- 1) перерисуй дерево **L** в тетрадь, заменив позиции их именами;
- 2) исследуй все позиции дерева **L** в учебнике и обведи в тетради имя каждой **выигрышной позиции красным**, а **проигрышной — синим**;
- 3) определи, у кого из игроков есть **выигрышная стратегия** и запиши эту стратегию в виде последовательности позиций.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 229.



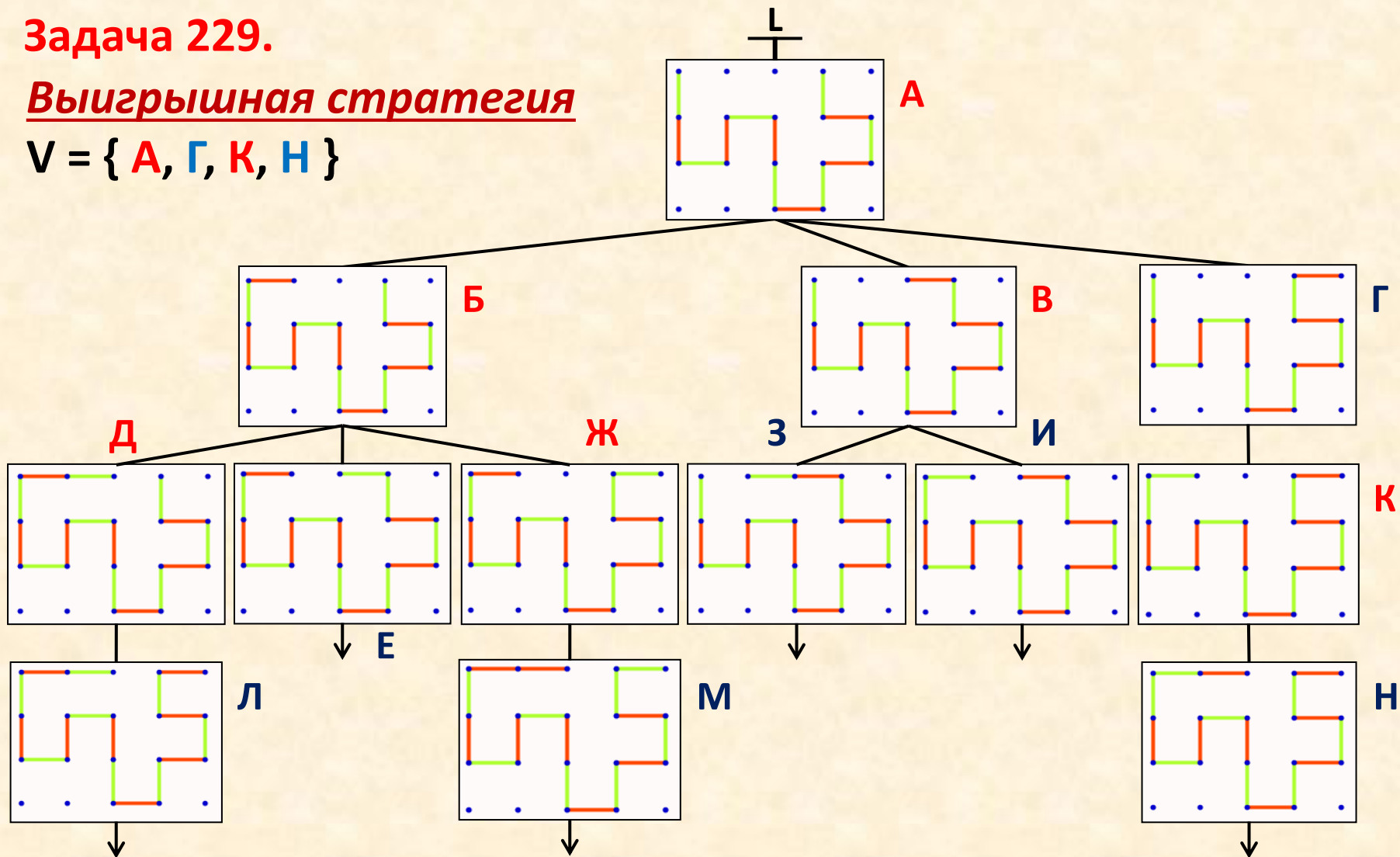
Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 229.

Выигрышная стратегия

$V = \{ \text{А, Г, К, Н} \}$



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 230. Найди выигрышную стратегию в игре *Камешки* (начальная позиция 10, разрешается брать 1, 2 или 3 камешка). Для этого исследуй все позиции игры, раскрась числовую линейку. Выясни, у кого из игроков есть выигрышная стратегия. Построй последовательность позиций такой партии, в которой этот игрок следует выигрышной стратегии, а его противник на каждом ходу берёт 2 камешка.

Начальная позиция. 10 камешков.

Возможные ходы. Разрешается брать 1, 2 или 3 камешка за 1 ход.

Заключительная позиция. Пустая куча камешков. При этом игрок, который забрал последний камешек из кучи, считается выигравшим.



$$A = \{ 10, 8, 6, 4, 2, 0 \}$$

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 231. Найди выигрышную стратегию в игре *Камешки* (начальная позиция **308**, разрешается брать **1**, **2** или **3** камешка). Для решения не обязательно раскрашивать числовую линейку от **0** до **308** целиком, а можно:

- 1) раскрасить позиции от **0** до **16**;
- 2) найти закономерность расположения *проигрышных позиций* на числовой прямой;
- 3) определить, какой будет начальная позиция, а значит, выяснить, кто из игроков обладает *выигрышной стратегией*;
- 4) сформулировать **выигрышную стратегию**, не перечисляя проигрышные позиции, а описывая их.

Начальная позиция. 308 камешков.

Возможные ходы. Разрешается брать **1**, **2** или **3** камешка за 1 ход.

Заключительная позиция. Пустая куча камешков. При этом игрок, который забрал последний камешек из кучи, считается выигравшим.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 231.

Начальная позиция. 308 камешков.

Возможные ходы. Разрешается брать 1, 2 или 3 камешка за 1 ход.

Заключительная позиция. Пустая куча камешков. При этом игрок, который забрал последний камешек из кучи, считается выигравшим.



Закономерность. *Проигрышные позиции* – это числа, которые при делении на 4 дают в остатке 0.

Выигрышная стратегия

Ход первый – из проигрышной позиции 308 (делится на 4) берём 1, 2 или 3 камешка. Попадаем в выигрышные позиции 307 (остаток 1), 306 (остаток 2), 305 (остаток 3) при делении на 4.

Следующие ходы На любые ходы Первого Второй берёт $4 - n$, где n – число камней взятое Первым.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 232. Прочитай описание игры *Назови 26*:

Играют двое. Первый игрок называет любое натуральное число, не превосходящее **4**, т. е. одно из чисел: **1, 2, 3, 4**. Второй игрок прибавляет к названному числу своё число, также не превосходящее **4**. К этой сумме первый прибавляет какое-либо натуральное число, не превосходящее **4**, и сообщает сумму, и т.д. Выигрывает тот, кто первым достигнет числа **26**.

Сформулируй **правила** этой игры как игры с полной информацией. Найди **выигрышную стратегию** в этой игре.

Начальная позиция. Число **0**.

Возможные ходы. Разрешается добавлять любое из чисел **1, 2, 3** или **4** за 1 ход.

Заключительная позиция. Сумма всех чисел равна **26**. При этом игрок, который добавлял последним, считается выигравшим.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 232. Назови 26:

Начальная позиция. Число 0.

Возможные ходы. Разрешается добавлять любое из чисел 1, 2, 3 или 4 за 1 ход.

Заключительная позиция. Сумма всех чисел равна 26. При этом игрок, который добавлял последним, считается выигравшим.



Выигрышная стратегия

Ход первый – из позиции 0 добавить 1. Попадаем в проигрышную позицию 1.

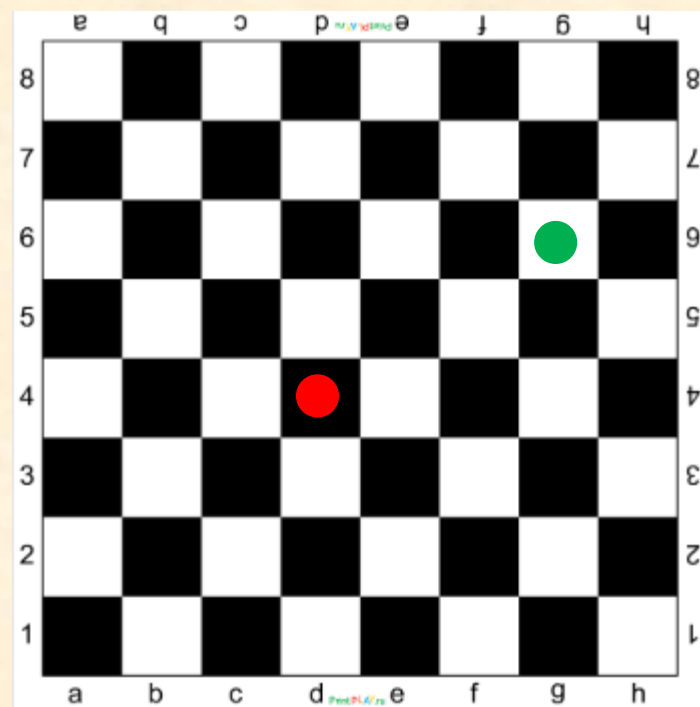
Следующие ходы На любые ходы Второго Первый добавляет число $5 - n$, где n – число добавленное вторым.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

В игре на шахматной доске, в которой игра ведётся только одной фигурой каждая позиция соответствует тому полю шахматной доски, на котором находится фигура (*полем* в шахматах называется клетка шахматной доски). Поэтому, исследовав все поля шахматной доски, мы исследуем **все возможные позиции** игры.

Каждое поле шахматной доски имеет имя, состоящее из латинской буквы и цифры. Например, поле с красной точкой имеет имя **d4**, а поле с зелёной точкой — имя **g6**.



Выигрышная стратегия.

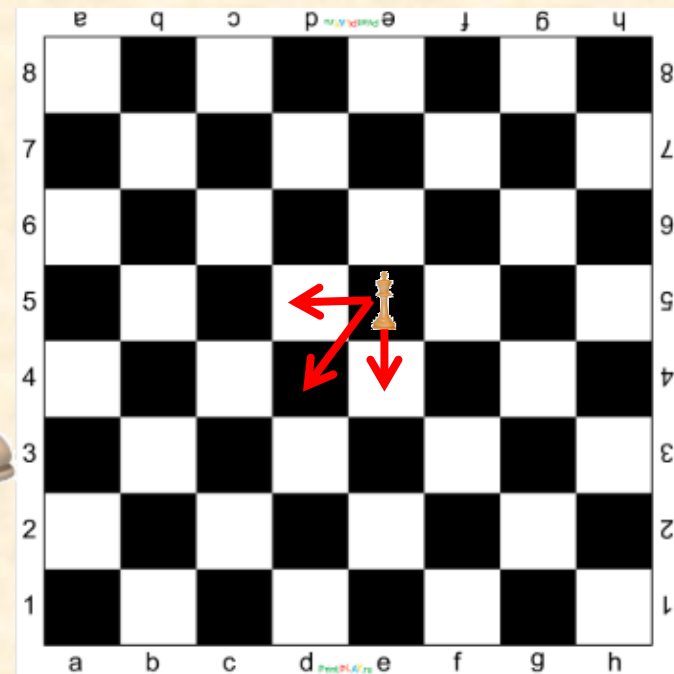
Выигрышные и проигрышные позиции.

ПРАВИЛА ИГРЫ КОРОЛЬ

Начальная позиция. Игра ведётся на шахматной доске, король стоит на одном из полей {на каком именно — устанавливается дополнительными правилами).

Возможные ходы. На каждом ходу игрок передвигает короля на одно поле влево, или на одно поле вниз, или на одно поле влево-вниз по диагонали.

Заключительная позиция. Игра заканчивается, если король оказывается в левом нижнем углу доски — на поле *a1*. Выигрывает игрок, который сделал последний ход.

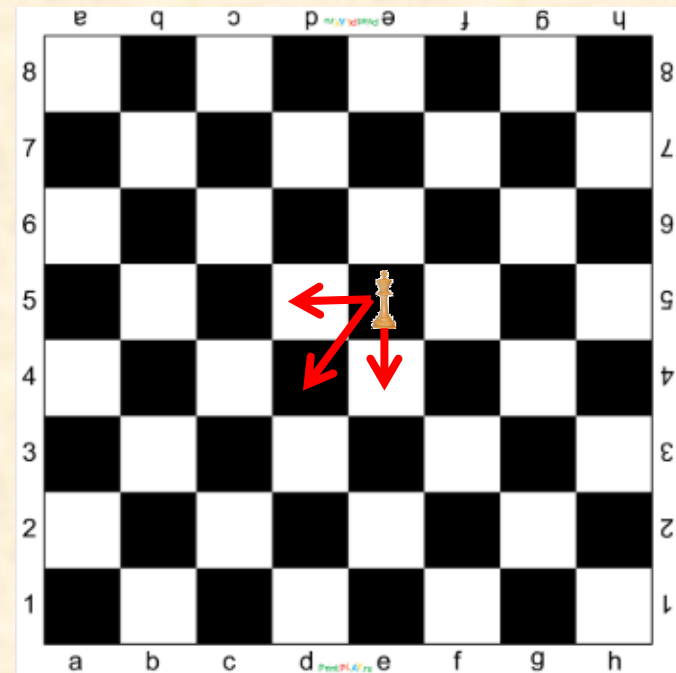


Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 234. Исследуйте все позиции **игры Король** с начальной позицией **h8**:

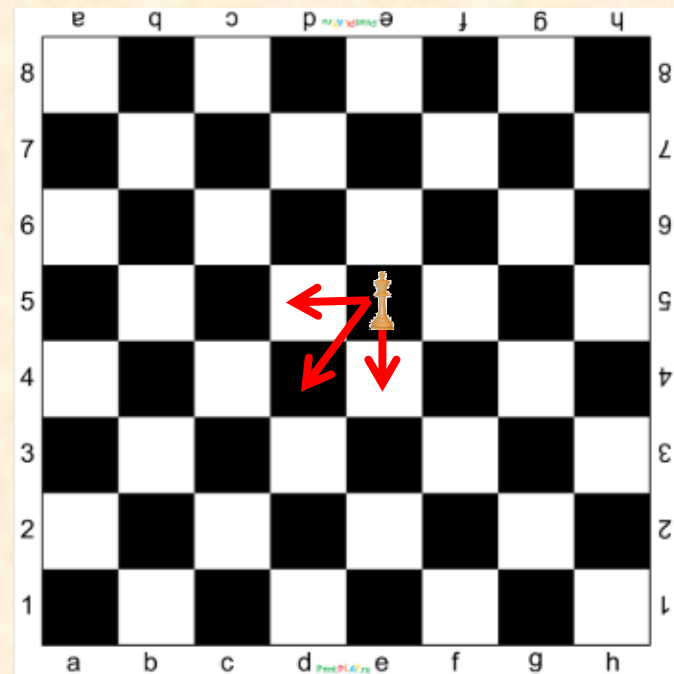
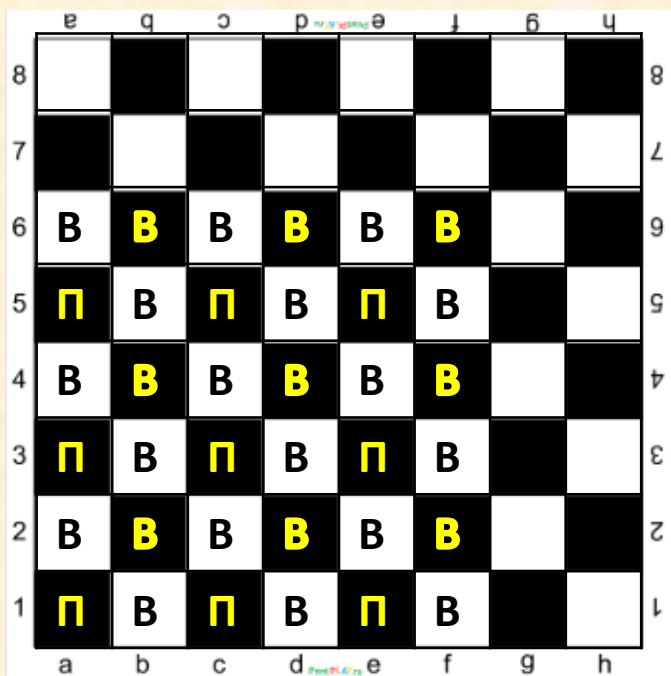
- 1) раскрась шахматную доску, начиная с заключительной позиции — с клетки **a1**;
- 2) определи, **выигрышной** или **проигрышной** будет начальная позиция, а значит, выясни, у кого из игроков есть **выигрышная стратегия**.



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Заключительная позиция — поле **a1**.
Эта позиция проигрышная. Все
позиции, из которых за один ход
можно попасть на поле **a1**, — поля
a2, **b1**, **b2** — выигрышные позиции.

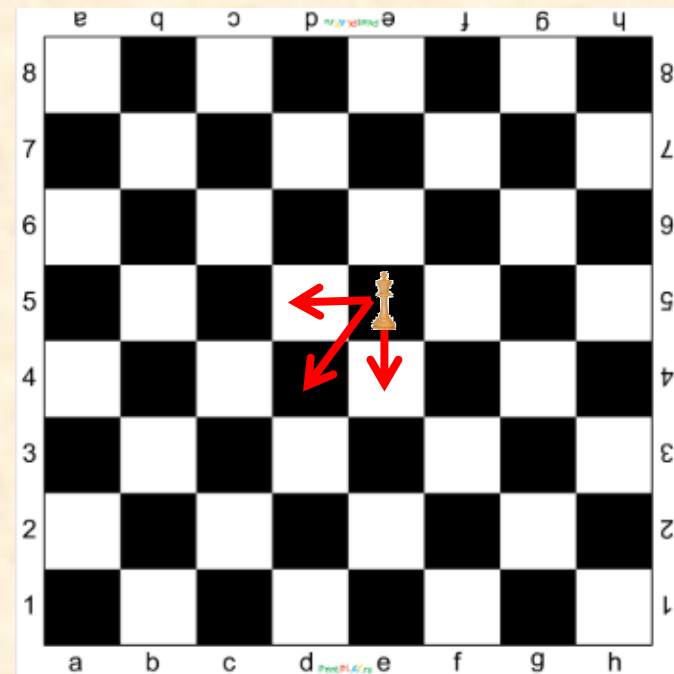
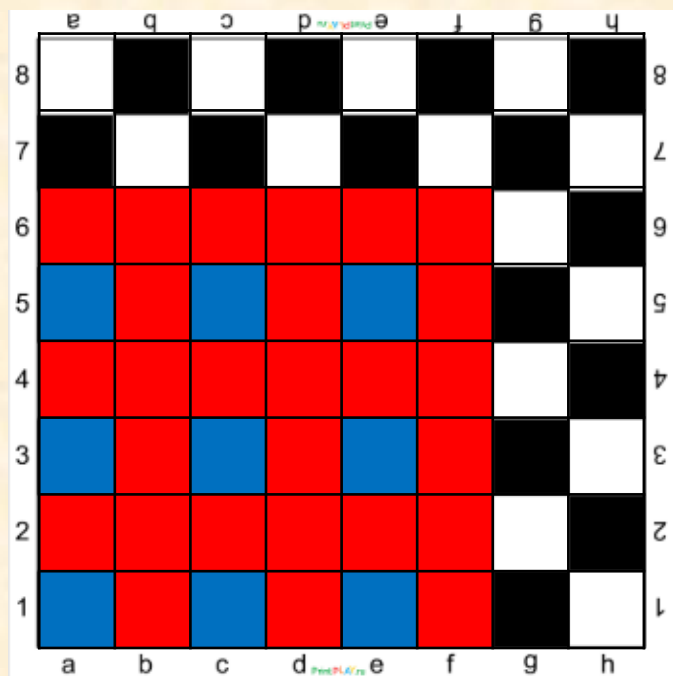


*Дальше выбираем для
исследования только те поля,
все ходы из которых ведут на
уже рассмотренные поля.*

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Шахматная раскраска в этой игре роли не играет. **Выигрышные позиции** раскрасим **красным** цветом, **проигрышные** — **синим**.



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

ПРАВИЛА ИГРЫ ДВЕ КУЧИ КАМЕШКОВ

Начальная позиция. Две кучи камешков (сколько камешков в каждой куче, устанавливается дополнительными правилами).

Возможные ходы. На каждом ходу игрок может взять либо один камешек из одной из куч, либо по одному камешку из обеих куч одновременно.

Заключительная позиция. Игра заканчивается, если все камешки закончились. Выигрывает тот игрок, который забрал последний камешек.



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

ДВЕ КУЧИ КАМЕШКОВ

Каждая позиция этой игры — это две кучи камешков; её можно представить в виде пары чисел, где первое число — количество камешков в первой куче, а второе во второй. Например, пара **(5; 2)** — позиция игры, где в первой куче **5** камешков, а во второй — **2**.

Все возможные позиции такой игры можно расположить в таблице, столбцы и строки которой занумерованы числами 0, 1, 2 и т. д. Каждая клетка таблицы соответствует некоторой позиции: номер столбца, в котором находится данная клетка, — это число камешков в первой куче, а номер строки — число камешков во второй.



Выигрышная стратегия. Выигрышные и проигрышные позиции.

ДВЕ КУЧИ КАМЕШКОВ

	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2						●	
3							
4							
5							
6							
7							



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 239. Найди **выигрышную стратегию** в *игре Две кучи камешков* с начальной позицией **(4; 5)**: раскрась поле, начиная с заключительной позиции — клетки **(0; 0)**, и определи, какой будет начальная позиция — выигрышной или проигрышной, а значит, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

Запиши последовательность позиций какой-нибудь партии, в которой один из игроков использует выигрышную стратегию, а другой на первом своём ходу берёт по одному камешку из каждой кучи, а на следующем — берёт один камешек из одной из куч (позиции обозначай парами чисел).

Выигрышная стратегия. Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 239.

	0	1	2	3	4
0	П	В	П	В	П
1	В	В	В	В	В
2	П	В	П	В	П
3	В	В	В	В	В
4	П	В	П	В	П
5	В	В	В	В	В

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 235. Даны правила игры *Ладья*:

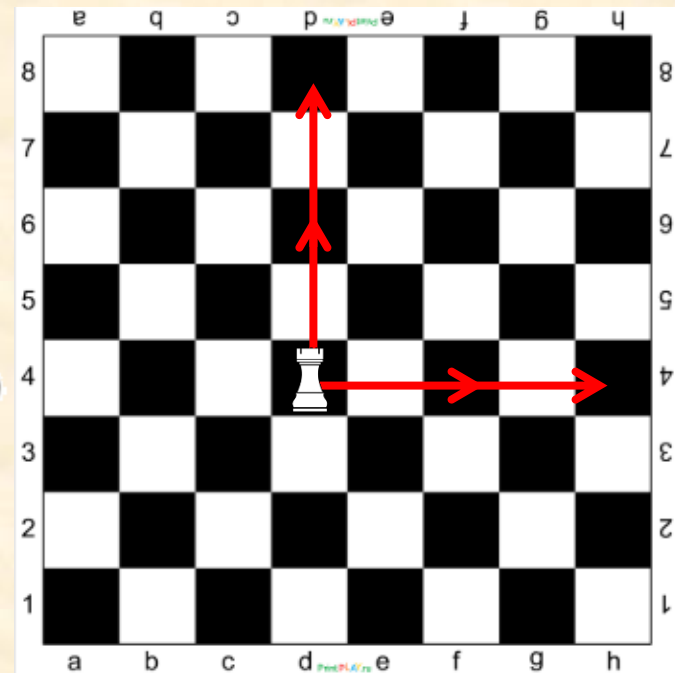
ПРАВИЛА ИГРЫ *ЛАДЬЯ*

Начальная позиция. Игра ведётся на шахматной доске, ладья стоит на одном из полей (на каком именно — устанавливается дополнительными правилами).



Возможные ходы. На каждом ходу игрок передвигает ладью на сколько угодно полей вправо или на сколько угодно полей вверх.

Заключительная позиция. Игра заканчивается, если ладья оказывается в правом верхнем углу доски — на поле ***h8***. Выигрывает игрок, который сделал последний ход.



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 236. Определи, при каких начальных позициях в игре *Ладья* **выигрышная стратегия** есть у

Первого и при каких — у **Второго**:

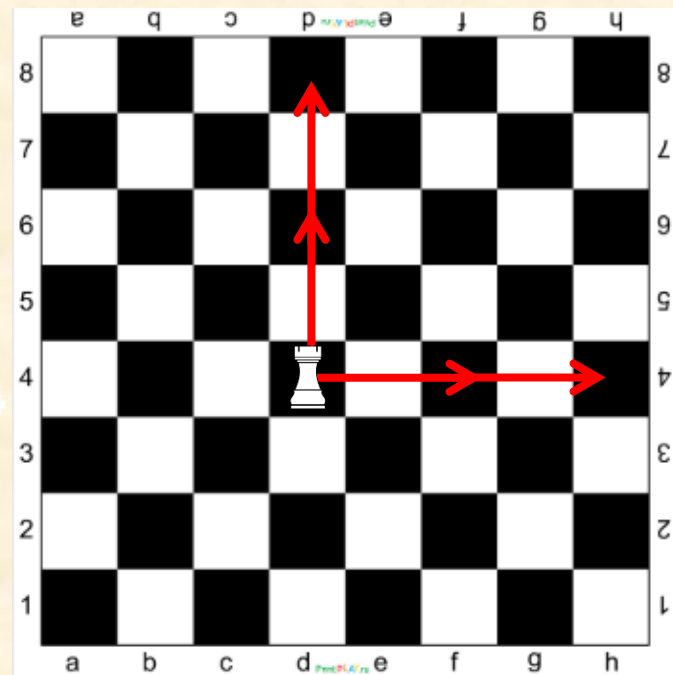
1) раскрась шахматную доску, начиная с заключительной позиции — поля **h8**;

2) постарайся коротко описать, при каких начальных позициях

выигрышную стратегию имеет **Первый** и при каких — **Второй**;

3) сформулируй выигрышную стратегию для **Первого** в игре с начальной позицией на поле **a2**;

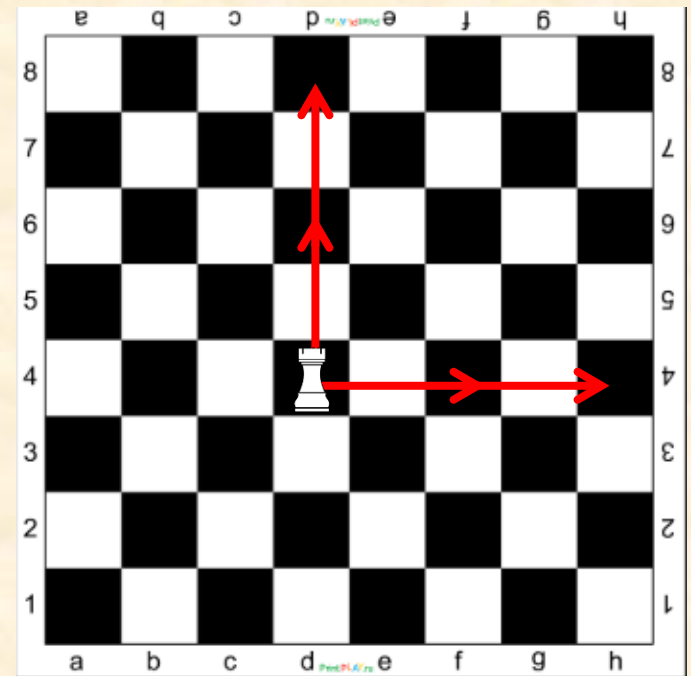
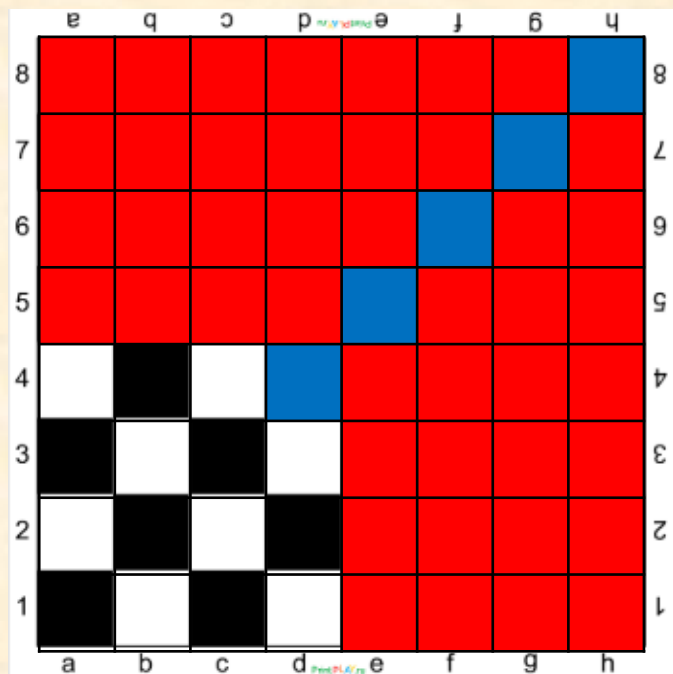
4) сформулируй выигрышную стратегию для **Второго** в игре с начальной позицией на поле **a1**.



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Шахматная раскраска в этой игре роли не играет. **Выигрышные позиции** раскрасим **красным** цветом, **проигрышные** — **синим**.



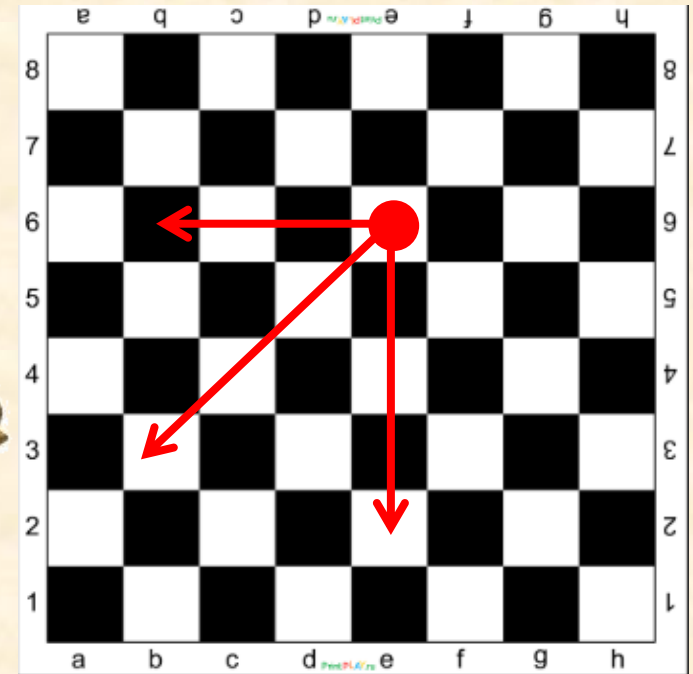
Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 237. Даны правила игры *Ферзь*:

ПРАВИЛА ИГРЫ *ФЕРЗЬ*

Начальная позиция. Игра ведётся на шахматной доске, ферзь стоит на одном из полей (на каком именно — устанавливается дополнительными правилами).



Возможные ходы. На каждом ходу игрок передвигает ферзя на сколько угодно полей влево или на сколько угодно полей вниз или на сколько угодно полей по диагонали влево-вниз.

Заключительная позиция. Игра заканчивается, если ладья оказывается в правом верхнем углу доски — на поле *h8*. Выигрывает игрок, который сделал последний ход.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 237. (Продолжение). Найди выигрышную стратегию в игре **Ферзь** с начальной позицией $d8$ и в той же игре с начальной позицией $h5$:

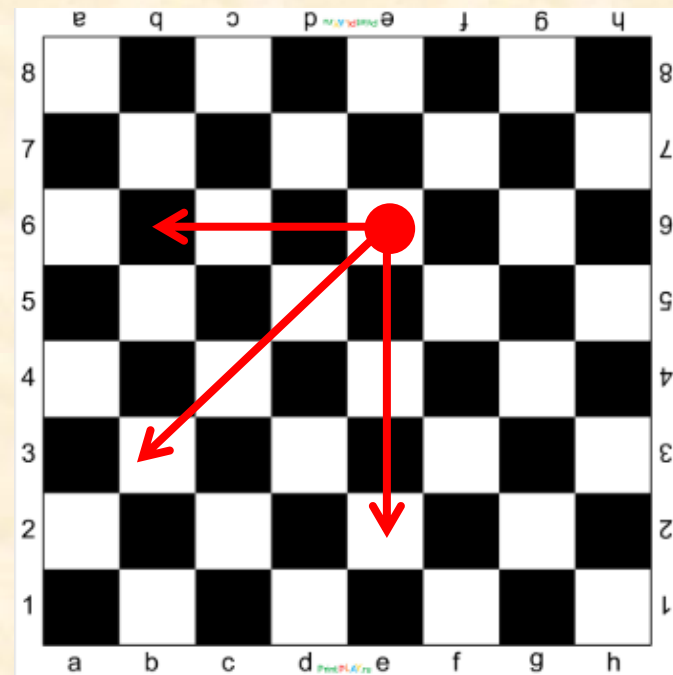
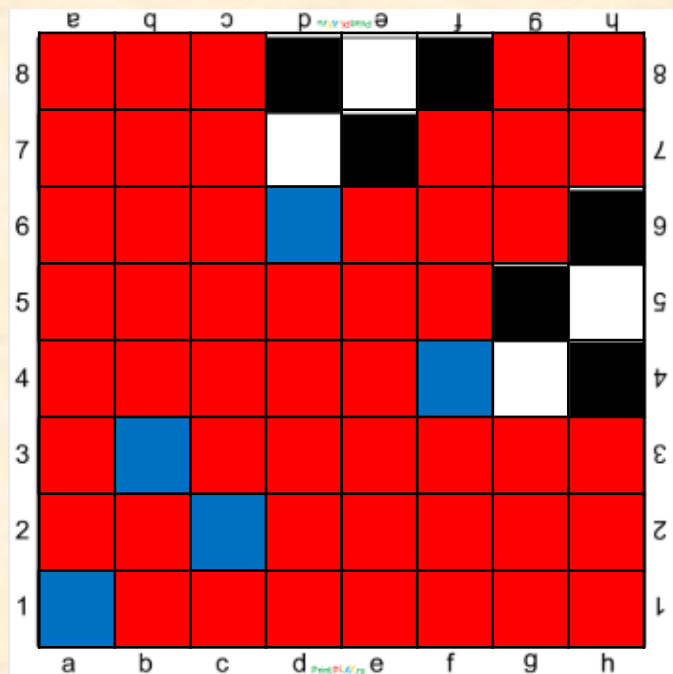
- 1) раскрась все поля шахматной доски, начиная с **заключительной позиции** — поля $a1$;
- 2) для каждой из двух начальных позиций ($g8$ и $h5$) определи, какой она будет — **выигрышной** или **проигрышной**, а значит, у кого из игроков есть в игре с этой начальной позицией **выигрышная стратегия**;
- 3) сформулируй **выигрышную стратегию** для каждой из этих двух начальных позиций.

Выпиши имена шести полей, с начальными позициями в которых в игре **Ферзь** **выигрышная стратегия** есть у **Первого**.
Выпиши имена ещё шести полей, с начальными позициями в которых в игре **Ферзь** **выигрышная стратегия** есть у **Второго**.

Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Шахматная раскраска в этой игре роли не играет. **Выигрышные позиции** раскрасим **красным** цветом, **проигрышные** — **синим**.



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 242. Даны правила игры *Две кучи камешков 2*:

ПРАВИЛА ИГРЫ ДВЕ КУЧИ КАМЕШКОВ 2

Начальная позиция. Две кучи камешков (сколько камешков в каждой куче, устанавливается дополнительными правилами).

Возможные ходы. На каждом ходу игрок может взять либо сколько угодно камешков из одной кучи, либо поровну камешков из обеих куч одновременно.

Заключительная позиция. Игра заканчивается, если все камешки закончились. Выигрывает игрок, который забрал последний камешек.



Выигрышная стратегия.

Выигрышные и проигрышные позиции.

Задача 242. Найди **выигрышную стратегию** в игре *Две кучки камешков 2* с начальной позицией **(6; 10)** и в той же игре с начальной позицией **(9; 8)**:

1) раскрась таблицу 11×11 , начиная с заключительной позиции — клетки **(0; 0)**;

2) определи, какой будет каждая из данных начальных позиций — **выигрышной** или **проигрышной**, — а значит, у кого из игроков есть в этой позиции **выигрышная стратегия**;

3) сформулируй **выигрышную стратегию** для каждой из данных начальных позиций.

Теперь для каждой из данных начальных позиций запиши последовательность позиций какой-нибудь партии, в которой один из игроков использует **выигрышную стратегию**, а другой на каждом ходу берёт по одному камешку из каждой кучки.

